3-12-2014

Στο προηγούμενο μάθημα:

Θ. Taylor: Αν $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f \in C^k(U)$

τότε $f(x+h) = \sum_{|a| \leq k} \frac{D^{\alpha} f(x)}{a!} h^a + o(\|h\|^k)$ για $h \to 0$

$\forall x \in U$

δηλ. $\lim_{h \to 0} \left(f(x+h) - \sum_{|a| \leq k} \frac{D^{\alpha} f(x)}{a!} h^a \right) \frac{1}{\|h\|^k} = 0$

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_n^{a_n}} f(x), \quad a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

$|a| = a_1 + \dots + a_n$

$\alpha! = \alpha_1! \cdots a_n!$

$h^a = (h_1, \dots, h_n)^a = h_1^{a_1} \cdots h_n^{a_n}$

οπου για $k=2$, $\sum_{\substack{|a|\le 2 \\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n}} \frac{D^a f(x)}{a!} = \sum_{m=0}^{2} \sum_{|a|=m} \frac{D^a f(x)}{a!} h^a$

και $m=0 \Rightarrow a=(0,\dots,0) \Rightarrow \frac{D^a f(x)}{\alpha!} h^a = f(x)$

$m=1 \Rightarrow \alpha = e_i = (0,\dots,0,\underset{i\text{-θεση}}{1},0,\dots 0)$, $i=1,\dots,n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{|a|=1} \frac{D^a f(x)}{a!} h^a = \nabla f(x)\cdot h$$

Στο σημερινό μάθημα:

- για $m=2$, $a\in\mathbb{N}_0^n$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

$|a| = a_1+\dots+a_n = 2 \Rightarrow a = e_i+e_j$, $i\le j$, $i,j=1,\dots,n$

οπου $e_i+e_j = (0,\dots,1,0,\dots,1,0,\dots 0)$ $i<j$

και $e_i+e_j = (0,\dots,2,0,\dots,0)$, $i,j=1,\dots,n$.

Αρα (αφου $|a|=2 \Rightarrow a = e_i+e_j$, $i\le j$ $i,j=1,\dots,n$)

Εχουμε, $\sum_{|a|=2} \frac{D^a f(x)}{a!} h^a = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\le j}}^{n} \frac{D^{e_i+e_j} f(x)}{(e_i+e_j)!} h^{e_i+e_j} =$

$$= \sum_{j,i=1}^{n} \frac{D^{2e_i} f(x)}{(2e_i)!} \underbrace{h^{2e_i}}_{h_i^2} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \frac{D^{e_i+e_j} f(x)}{(e_i+e_j)!} \underbrace{h^{e_i+e_j}}_{h_i h_j} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j,i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

$$= \frac{1}{2}(h_1,\dots,h_n)\cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} h^T \cdot H_f(x)\cdot h.$$

Η $H_f(x)$ είναι ο Εσσιανός πίνακας της f στο x και είναι συμμετρικός αν $f\in C^2(U)$

και $H_f(x) = D^2 f(x) = D(D(f(x)))$.

ΒΑΣΙΚΟ ΠΟΡΙΣΜΑ ΤΟΥ Θ. TAYLOR (SOS)

Εστω $f: U\to\mathbb{R}$, $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοιχτο. Τοτε $\forall x\in U$ έχουμε:

α) $f\in C(U) = C^0(U) \Rightarrow f(x+h) = \sum_{|a|=0} \frac{D^a f(x)}{a!} h^a + o(\|h\|^0) =$

$= f(x) + o(1)$ για $h\to 0$, με $f(x)$ πολυώνυμο Taylor βαθμου 0 της f στο x

δηλ. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{1} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ δηλ. $\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$

β) $f\in C^1(U) \Rightarrow f(x+h) = \sum_{|a|\le 1} \dfrac{D^a f(x)}{a!} h^a + o(\|h\|^1)$

για $h\to 0$ όπου

$$\sum_{|a|\le 1} \frac{D^a f(x)}{a!} = \sum_{|a|=0} \dots + \sum_{|a|=1} \dots = f(x)+\nabla f(x)\cdot h$$

δηλ. $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)-\nabla f(x)\cdot h}{\|h\|} = 0.$

Το $f(x)+\nabla f(x)\cdot h = T_{1,f,(x)}(h)$ είναι το πολυώνυμο taylor $1^{ου}$ βαθμού της f γύρω από το x και είναι η βέλτιστη γραμμική προσέγγιση της f γύρω (και κοντά) στο x.

γ) $f\in C^2(U) \Rightarrow f(x+h) = \sum_{|a|\le 2} \dfrac{D^a f(x)}{a!} h^a + o(\|h\|^2),\ h\to 0$

$$= f(x)+\nabla f(x)\cdot h + \frac{1}{2} h^T\cdot Hf(x) h + o(\|h\|^2),\ h\to 0$$

δηλ. $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)-\nabla f(x)\cdot h - \frac{1}{2}h^T Hf(x) h}{\|h\|^2} = 0$

Το πολυώνυμο Taylor βαθμού 2 της f στο x είναι η βέλτιστη τετραγωνική προσέγγιση της f κοντά στο x.

Ασκηση

Να υπολογίσετε το πολυώνυμο Taylor $2^{ου}$ βαθμού της $f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cdot \sigma\upsilon\nu y$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0)=(1,0)$

ΛΥΣΗ

$f(x_0,y_0) = f(1,0) = 1$

$\nabla f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cdot(2(x-1)\sigma\upsilon\nu y, -\eta\mu y)$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{(x-1)^2}\cdot 2(x-1)\sigma\upsilon\nu y\right), & \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{(x-1)^2}\cdot 2(x-1)\cdot\sigma\upsilon\nu y\right) \\ \frac{\partial}{\partial x} e^{(x-1)^2}\cdot(-\eta\mu y), & \frac{\partial}{\partial y} e^{(x-1)^2}\cdot(-\eta\mu y) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Hf(x,y) = e^{(x-1)^2}\begin{pmatrix} (4(x-1)^2+2)\sigma\upsilon\nu y & -2(x-1)\sigma\upsilon\nu y \\ -2(x-1)\sigma\upsilon\nu y & -\sigma\upsilon\nu y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Hf(x_0,y_0) = Hf(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Άρα, πολυώνυμο Taylor της f στο $(1,0)$
Βαθμού 2 : $T_{2,f,(1,0)}(x,y) = f(1,0) + \nabla f(1,0)\cdot\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0\end{pmatrix} +$

$$+\frac{1}{2}(x-1,y)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y\end{pmatrix} =$$

$$= 1 + (0,0)\cdot\begin{pmatrix} x-1 \\ y\end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1,y)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y\end{pmatrix} =$$

$$= 1 + (x-1)^2 - \frac{1}{2}y^2$$

Βάση του Taylor

$$f(x,y) = 1 + (x-1)^2 - \frac{1}{2}y^2 + o\left(\|(x,y)-(1,0)\|^2\right) =$$
$$= 1 + (x-1)^2 - \frac{1}{2}y^2 + o\left[(x-1)^2+y^2\right], \quad [\|(x,y)-(1,0)\|\to 0]$$

δηλ.

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{f(x,y) - 1 - (x-1)^2 + \frac{1}{2}y^2}{(x-1)^2+y^2} = 0$$